Séries de puissances

Prenons un exemple tel que $(x-3)(x-4)y'' + 2xy' + y = 0$ avec les conditions initiales $y(0) = 2$ et $y'(0) = 1$.

Trouver les points singuliers

Pour trouver les points singuliers, on résoud $(x-3)(x-4) = 0$, ce qui donne $x = 3$ ou $x = 4$.

Le point singulier est le point le plus près par rapport au point donné par les conditions initiales. Dans l'exemple, il sagit de 0 puisque les conditions initiales sont données à ce point.

Le premier point singulier le plus près est 3, puisque 3 est plus près de 0 que 4. Nous avons donc notre $R = 3$.

La solution peut être représentée par une série de puissances $\sum a_n x^n$ dans l'intervale $]-3;3[$.

Dérivations de y

Les y et ses dérivées sont remplacées par :

$$y = \sum a_n x^n$$
$$y' = \sum n a_n x^{n-1}$$
$$y'' = \sum (n-1) n a_n x^{n-2}$$

Donc, nous avons :

$$(x-3)(x-4)\sum (n-1) n a_n x^{n-2} + 2x \sum n a_n x^{n-1} + \sum a_n x^n = 0$$

$$(x^2 - 7x + 12)\sum (n-1) n a_n x^{n-1} + \sum 2n a_n x^n + \sum a_n x^n = 0$$
$$\sum (n-1) n a_n x^n - \sum 7(n-1) n a_n x^{n-1} + \sum 12(n-1) n a_n x^{n-2} + \sum (2n a_n + a_n) x^n = 0$$
$$\sum (n-1) n a_n x^n - \sum 7n(n+1) a_{n+1} x^n + \sum 12(n+1)(n+2) a_{n+2} x^n + \sum (2n+1) a_n x^n = 0$$

On doit avoir une sommation de la forme $\sum C_n x^n = 0$ où $C_n = 0 \ \ \forall n$.

$$\sum \left[(n-1) n a_n - 7n(n+1) a_{n+1} + 12(n+1)(n+2) a_{n+2} + (2n+1) a_n\right] x^n = 0$$
$$\sum \left[(n^2 + n + 1) a_n - 7n(n+1) a_{n+1} + 12(n+1)(n+2) a_{n+2}\right] x^n = 0$$

Formule de récurence

Nous gardons le coefficient de x^n dans $\sum C_n x^n$ pour l'égaler à 0, donc $C_n = 0$.

$$(n^2 + n + 1) a_n - 7n(n+1) a_{n+1} + 12(n+1)(n+2) a_{n+2} = 0$$

On isole a_{n+2} pour trouver la formule de récurence :

$$a_{n+2} = \frac{7n(n+1) a_{n+1} - (n^2 + n + 1) a_n}{12(n+1)(n+2)}$$

En général, $a_0 = y(x_0)$ et $a_1 = y'(x_0)$.

Calcul des itérations

En utilisant une calculatrice, on peut y mettre $\frac{7n(n+1)a_{n+1}-(n^2+n+1)a_n}{12(n+1)(n+2)}$ dans une fonction $f(n, a_n, a_{n+1})$.

n	a_n	$f(n,x,y)$
0	2	$y(x_0)$
1	1	$y'(x_0)$
2	$-\frac{1}{12}$	$f(0,2,1)$
3	$-\frac{25}{432}$	$f(1,1,-\frac{1}{12})$
4	$-\frac{33}{10368}$	$f(2,-\frac{1}{12},-\frac{25}{432})$

La première colonne du tableau représente les itérations de n, la deuxième colonne représente les valeurs de a_n et la troisième colonne représente les opérations effectués pour arriver à la valeur de a_n.

Donc, $y(x) \approx 2 + x - \frac{1}{12}x^2 - \frac{25}{432}x^3 - \frac{33}{10368}x^4$ dans l'intervalle $]-3;3[$.